

Vì sao trong Phép Nhân Đại Số, Tích Số của hai số Âm là một số Dương ?

Nguyễn Vĩnh-Tráng

Chúng ta, ai cũng biết, trong Đại Số Học, Tích số của hai số Âm là một số Dương (chương trình lớp Đệ Lục / Lớp 7), nhưng có ai đã tự hỏi **Vì Sao** Tích Số đó là hoàn toàn đúng ?

Riêng cá nhân tôi, từ lúc bắt đầu học Đại Số (lớp Đệ Lục / lớp 7), cho đến khi hết học Đại Học, chưa được Thầy, Cô nào giảng cho « Ví Sao Tích Số của hai số Âm là một số Dương » cả, mà chỉ được Thầy, Cô dạy cho « Luật » Nhân các số đại số. Chắc cũng đã có các Thầy, các Cô đã giảng cho học sinh, cho sinh viên biết cái « **Vì Sao** », nhưng tôi chưa có may mắn gặp được trường hợp đó. Cả lúc dạy Toán ở Trung Học cũng như ở Đại Học, tôi cũng chưa bao giờ nghe một đồng nghiệp giải thích cho học trò, cho sinh viên **Vì Sao** ta có kết quả như vậy.

Ở Đại Học thì khỏi cần nói, vì nếu một sinh viên học Toán chưa biết « vì sao » thì đó là một chuyện « lớn » lắm, cho nên các giáo sư, giảng viên « khỏi cần » đặt câu hỏi « hạ cấp » như vậy. Nhưng theo tôi, e một số lớn sinh viên, mà ngay cho cả một số giáo sư cũng không để ý đến cái « vì sao », và nếu cố gắng vặn hỏi, e họ cũng khá lúng túng để trả lời. Chuyện cũng vì khi chúng ta còn là những học sinh ở các trường Trung Học đệ nhất cấp (Trung Học Cơ Sở cấp II), chúng ta thường chỉ học « Luật » Nhân, chứ không học cái « **Vì Sao** » chẳng.

Khi dạy ở Trung Học, vì tôi có nhiều thì giờ tiếp xúc một cách thân mật với các đồng nghiệp, nên đôi khi tôi có đưa câu hỏi « vì sao » ra để xin ý kiến, thì thường thường được các đồng nghiệp chân tình nói : « À, chính tôi cũng không để ý đến cái « vì sao », và cũng chỉ dùng cái « Luật » Nhân mà thôi ». Rồi nếu có chút thì giờ thì bàn với nhau về các « lôgích » như « Bạn của Bạn mình là Bạn mình. Người Thù của Bạn mình là người Thù của mình... ». Tựu trung cũng chỉ là « Triết Lý » chứ không nói rõ, một cách cụ thể, « vì sao » những câu « Người Thù của người Thù của mình là Bạn của mình »... lại ứng với Phép Nhân trong Đại Số.

Trước khi nói đến cách « giải thích cụ thể » về Phép Nhân, tôi xin kể qua các « lôgích » mà các đồng nghiệp đã bàn với tôi. Ở đây cũng nên nói rõ là cách « giải thích cụ thể » mà tôi sẽ trình bày dưới đây, không chắc là cách giải thích duy nhất. Rất có thể có những cách giải thích khác, và nếu có, kính xin quý vị độc giả vui lòng cho tôi biết.

I – Các Lập Luận Loại Suy (Analogie / Analogy).

1) Lập luận Loại Suy dựa trên Tình Bạn.

Nếu « Bạn » tượng trưng cho dấu « + », và « Thù » tượng trưng cho dấu « - », ta có :

Bạn (+) của Bạn (+) mình là Bạn (+) mình.	Tạm ký hiệu như sau : (+) x (+) = (+).
Bạn của người Thù mình là người Thù của mình.	Tạm ký hiệu như sau : (+) x (-) = (-).
Người Thù của Bạn mình là người Thù của mình.	Tạm ký hiệu như sau : (-) x (+) = (-).
Người Thù của người Thù của mình là Bạn mình.	Tạm ký hiệu như sau : (-) x (-) = (+).

Chuyện trên không đề cập một cách cụ thể Phép Nhân, và vì sao lại là Phép Nhân mà không phải các phép tính khác.

Mặt khác, chưa chắc là « Người Thù của kẻ Thù của mình là Bạn của mình ». Những thí dụ để chứng minh điều này rất dễ kiếm, như chuyện các cường quốc « thù nghịch nhau » vào những năm 1970 chẳng hạn : Liên Xô là kẻ « Thù » của Trung Cộng, Trung Cộng là kẻ « Thù » của Mỹ, nhưng Liên Xô không phải là « Bạn » của Mỹ, mà lúc đó Liên Xô và Mỹ là hai kẻ đang « Thù » lẫn nhau.

2) Lập luận Loại Suy theo Có và Không.

Nếu Có tượng trưng cho (+) và Không tượng trưng cho (-), ta có :

Có (+) Có (+) ăn, nghĩa là Có (+) ăn, và tạm ký hiệu	:	(+) x (+) = (+) ,
Không (-) Có (+) ăn, nghĩa là Không (-) ăn, tạm ký hiệu	:	(-) x (+) = (-) ,
Có (+) Không (-) ăn, nghĩa là Không (-) ăn, tạm ký hiệu	:	(+) x (-) = (-) ,
Không (-) Không (-) ăn, nghĩa là Có (+) ăn, tạm ký hiệu	:	(-) x (-) = (+) .

Ở đây cũng như trên, vì sao cái « lôgic » này lại ứng với Phép Nhân mà không ứng với các phép tính khác.

3) Dùng đặc tính Phân Phối của Phép Nhân đối với phép Cộng (distributivité / distributivity)

Cho 3 số dương a, b, c.

Ta có :	$a(b + c)$	=	$ab + ac$.
Thay a bằng (-a) và c bằng (-b) :	$-a[b + (-b)]$	=	$-ab + (-a)(-b)$,
hay :	$-a(0)$	=	$-ab + (-a)(-b)$,
hay :	0	=	$-ab + (-a)(-b)$.
Chuyển vế (hay cộng ab tuần tự cho hai vế ở trên):	ab^*	=	$(-a)(-b)$,
nghĩa là, tạm ký hiệu :	(+)	=	(-) x (-).

* a và b là hai số dương, tích số của hai số dương là một số dương.

Ở đây, cũng còn phải chứng minh vì sao : (+) x (-) = (-).

Tóm lại, các « lôgic » (1) và (2) không nói rõ vì sao đúng cho Phép Nhân, còn đặc tính (3) thì chứng minh cũng hơi phức tạp, và đòi hỏi sự hiểu biết tính chất Phân Phối của Phép Nhân đối với Phép Cộng (Cộng). Ngoài ra còn có nhiều « lôgic » khác như « Đi Tới » tượng trưng cho (+), « Đi Lui » tượng trưng cho (-)... Nhưng cũng như trên, không nói rõ vì sao những « lôgic » đó ứng với Phép Nhân cả.

Ngay cả trên Internet, cho đến cuối tháng Hai năm nay 2013, cũng có một số người đặt câu hỏi « Vì Sao » như trên, và cũng đưa ra những chứng minh, những bàn luận sôi nổi. Nhưng những chứng minh và bàn luận đó cũng không có tính cách rõ ràng và thuyết phục cho mấy, như ở những mạng : (mathsforum.com/produit2nombresnegatifsdonneunnombrepositif) hay (mathematiques.net/phorum/read)...

Ta hãy xem cách giải thích ở dưới, hết sức đơn giản, vì nó dùng ngay đặc tính của Phép Nhân.

II – Cách giải thích cụ thể, dựa trên tính chất (đặc tính) của Phép Nhân.

Nhắc lại :

- Phép Cộng (Cộng) (+) là có thêm, Phép Trừ (-) là bớt đi (mất đi) (ví dụ + 3 là có thêm 3 đơn vị, - 3 là bớt đi 3 đơn vị).
- Phép Nhân là Phép Cộng nhiều lần một số lượng (ví dụ : 3 + 3 + 3 + 3 nghĩa là 4 lần 3 và 3 + 3 + 3 + 3 = 4 x 3 = 12).
- Tính Giao Hoán của Phép Nhân : (a x b = b x a).
- Ký hiệu : 3 = +3.
- Ký hiệu : Tích số của hai thừa số ab, theo thứ tự, tôi gọi a là thừa số thứ nhất và b là thừa số thứ hai.

Ta có Phép Nhân như sau, lấy ví dụ bảng Phép Nhân của số 3 :

.....	
3 x 4 = 12 ;	
3 x 3 = 9 ,	bớt đi 3 đơn vị (12 - 3 = 9) ;
3 x 2 = 6 ,	bớt đi 3 đơn vị (9 - 3 = 6) ;
3 x 1 = 3 ,	bớt đi 3 đơn vị (6 - 3 = 3) ;
3 x 0 = 0 ,	bớt đi 3 đơn vị (3 - 3 = 0). [Bảng 1]

Ta thấy, hễ bớt đi một đơn vị trong thừa số thứ hai của bảng trên, thì số thành sẽ bị bớt đi 3 đơn vị ; hay hễ thêm một đơn vị trong thừa số thứ hai, thì số thành sẽ tăng thêm 3 đơn vị.

Ta tiếp tục xem :

3 x 0 = 0 ;	
3 x (-1) = -3 ,	từ 0 đến (-1), ta bớt đi một đơn vị trong thừa số thứ hai, thì số thành sẽ Phải Bớt đi 3 đơn vị, như ta đã thấy ở trên ! (0 - 3 = -3) ;
3 x (-2) = -6 ,	vì phải bớt đi 3 đơn vị (-3 - 3 = -6) ;
3 x (-3) = -9 ,	vì phải bớt đi 3 đơn vị (-6 - 3 = -9) ;
.....	[Bảng 2]

[Bảng 2] cho ta thấy : Từ hàng trên xuống hàng dưới, phải Bớt đi 3 đơn vị trong thành số; hay từ hàng dưới lên hàng trên, thì phải Thêm vào 3 đơn vị trong thành số.

Theo ký hiệu và tính Giao Hoán của Phép Nhân, đẳng thức 3 x (-2) = -6 có thể viết như sau :

$$3 \times (-2) = (+3) \times (-2) = (-2) \times (+3) = -6.$$

(Giải thích chuyện này không khó, nên xin miễn bàn ở đây).

Từ đó ta có, cũng theo [Bảng 2], đọc từ dưới lên trên (**phải thêm vào 3 đơn vị trong thành số, khi bớt đi một đơn vị trong thừa số thứ hai**) :

3 x (-3) = (+3) x (-3) =	(-3) x (+3) = -9 ;	
3 x (-2) = (+3) x (-2) =	(-3) x (+2) = -6 ,	thêm vào 3 đơn vị (-9 + 3 = -6) ;
3 x (-1) = (+3) x (-1) =	(-3) x (+1) = -3 ,	thêm vào 3 đơn vị (-6 + 3 = -3) ;
3 x 0 = (+3) x (0) =	(-3) x (0) = 0 ,	thêm vào 3 đơn vị (-3 + 3 = 0) ; [Bảng 3]
Và :	(-3) x (-1) = +3 ,	Vì Phải Thêm vào 3 đơn vị ! (0 + 3 = +3),
	(-3) x (-2) = +6 ,	vì phải thêm vào 3 đơn vị (+3 + 3 = +6) ;
	(-3) x (-3) = +9 ,	vì phải thêm vào 3 đơn vị (+6 + 3 = +9) ;
	[Bảng 4].

Ta có thể xem đây như bảng Phép Nhân của số (-3).

Kết quả là, tạm ký hiệu như sau :

$$\begin{array}{ll} (+) \times (+) = (+) , & \text{theo [Bảng 1],} \\ (+) \times (-) = (-) , & \text{theo [Bảng 2],} \\ (-) \times (+) = (-) , & \text{theo [Bảng 3],} \\ (-) \times (-) = (+) , & \text{theo [Bảng 4].} \end{array}$$

Cách giải này là lấy ngay đặc tính của Phép Nhân, nghĩa là đụng chạm ngay Phép Nhân, chứ không phải dùng các « lôgích » ở trên (phần I), để nói đến đặc tính của Phép Nhân một cách « Triết lý » mơ hồ.

Chuyện thật là dễ dàng, nhưng đôi khi chúng ta không để ý tới, để rồi đi tìm những khó khăn như các « lôgích » trên. Nhưng cái Vui của Toán Học là ở chỗ đó !

Mong Độc Giả cho thêm ý kiến. Kính xin đa tạ.

Nguyễn Vĩnh-Tráng
124 022 013 nvt*ttl*