SO SÁNH CÁC TRUNG BÌNH CỌNG (CỘNG), NHÂN, ĐIỀU HÒA BẰNG HÌNH HỌC PHẲNG.

TS. Nguyễn Vĩnh-Tráng

Lúc còn đi dạy học, và để mua vui, tôi có nói với học sinh (Trung Học), hay với sinh viên (Đại Học), về cách so sánh bằng Hình Học nầy, khi dạy môn Thống Kê. Lúc đó tôi không thấy các bạn đồng nghiệp đề cập tới. Có lẽ đối với họ cũng chỉ là chuyện vui. Bây giờ, tôi cũng chưa thấy các sách Toán ở cấp Trung Học và Đại Học nói đến (có lẽ đã có sách nói đến, nhưng tôi chưa có dịp đọc). Vậy tôi viết bài nầy, để độc giả đọc cho vui.

Ở đây tôi chỉ đề cập đến những số « Trung Bình » thường gặp ở cấp Trung Học, đó là Trung Bình Cọng (Cộng), Trung Bình Nhân, Trung Bình Điều Hòa, và cũng chỉ dùng 2 số lượng dương a, b.

Trước khi so sánh các số Trung Bình trên, chúng ta hảy xem định nghĩa của các số Trung Bình trên đã.

I - Định Nghĩa các số Trung Bình.

Phần nhiều các sách Toán Học hay các Từ Điển cho định nghĩa số Trung Bình bằng những biểu thức Toán Học. Nay tôi cố gắng giải thích những biểu thức đó :

Nếu có 2 trị số dương a và b và sau phép biến đổi, ta có trị số N, thì số Trung Bình của 2 trị số a và b là trị số dương c, với điều kiện là, nếu ta thay trị số c vào 2 trị số a và b, thì sau, cùng một phép biến đổi, ta vẫn có trị số N.

1) Số Trung Bình Cọng (Cộng).

Giá con Gà là a, giá con Vịt là b, vậy nếu ta mua cả con Gà và con Vịt, thì ta phải trả tất cả là (a + b). Vậy Trung Bình, giá mỗi con là bao nhiêu. Gọi m là số Trung Bình của a và b, thì khi thay m vào 2 trị số a và b, ta có :

$a + b = m + m = N$, hay $2m = a + b$ hay $m = (a + b) / 2$. (ký hiệu / để chỉ phép chia).

$m = (a + b) / 2$ là biểu thức Toán Học của số Trung Bình Cọng (Cộng) của 2 số trị a và b.

2) Số Trung Bình Nhân.

Cho một số P (cho P = 100) ở đầu năm 2010, cuối năm 2010 (hay đầu năm 2011), ta có gấp a (cho a = 3) lần (nghĩa là 3xP, hay 3P, hay aP, hay 300), và cuối năm 2011, ta lại có gấp b (cho b = 2) lần số của đầu năm 2011 (nghĩa là 2x3P = 6P, hay abP, hay 600). Gọi g là Trung Bình của a và b (trong thí dụ nầy a = 3 và b = 2), thay g vào trị số a và b, ta có :

$ab = gg = g^2$, hay $g = \sqrt{ab}$. (ký hiệu √ để chỉ căn số bậc hai của hai số a, b).

Theo ví dụ trên ta có $g = \sqrt{ab} = \sqrt{(3 \times 2)} = \sqrt{6} = 2{,}449\ 489\ 442\ 783$.
Cuối năm 2010, ta có $P' = gP = 100 \times 2{,}449\ 489\ 442\ 783 = 244{,}948\ 974\ 278$.

Cuối năm 2011, ta có P'' = gP' = 244,948 974 278 x 2,449 489 442 783 = 599,999 999 999 nghĩa là 600.

Nên nhớ, ở đây g không bằng (a + b) / 2, nghĩa là 5 / 2 = 2,5. Nếu không, ta sẽ được 625, thay vì 600.

$g = \sqrt{ab}$ là biểu thức Toán Học của số Trung Bình Nhân của 2 trị số a và b.

3) Số Trung Bình Điều Hòa.

Khoảng cách AB là d (cho d = 100 km). Xe chạy từ A đến B với vận tốc là a km/giờ (cho a = 50 km/giờ), và từ B trở lại A với vận tốc là b km/giờ (cho b = 60 km/giờ). Gọi h là (vận tốc) Trung Bình của a và b.Ta có :

Khi đi từ A đến B, ta mất (thì giờ) : d / a. Khi về từ B lại A, ta mất : d / b. Ta mất tất cả (thì giờ) là (d / a) + (d / b). Nếu thay h vào a và b, ta có :

(d / a) + (d / b) = (d / h) + (d / h) = 2d / h, hay 2 / h = (1 / a) + (1 / b), hay h = 2ab / (a + b).
Với ví dụ trên, ta có : Khi đi, ta mất 100 / 50 = 2 giờ; khi về, ta mất 100 / 60 = 1,666 666 667 giờ. Tất cả là mất 3,666 666 667 giờ.
Hay lấy Trung Bình, ta có : h = 2 x 50 x 60 / (50 + 60) = 6 000 / 110 = 54,545 454 545 km/giờ. Và ta sẽ mất tất cả là : 200 / 54, 545 454 545 = 3,666 666 667 giờ, hay 3 giờ 40 phút.

Nên nhớ, h ở đây không bằng (a + b) / 2, nghĩa là (50 + 60) / 2 = 55 km/giờ. Nếu không, ta sẽ có 200 / 55 = 3,636 363 636 giờ, hay 3 giờ 38 phút, thay vì 3 giờ 40 phút.

h = 2ab / (a + b) là biểu thức Toán Học của số Trung Bình Điều Hòa của 2 trị số a và b.

II – So sánh 3 loại Trung Bình trên bằng Đại Số.

Thường thường các sách Toán cho cách so sánh (bằng Đại Số) nầy.

Ta có, nếu $a \le b$, thì :

$0 < a \le h \le g \le m \le b$.

1) Thật thế, $g \ge h$, hay $\sqrt{ab} \ge [2ab / (a + b)]$,
hay $(a + b)^2ab \ge 4a^2b^2$,
hay $(a + b)^2 \ge 4ab$,
hay $(a + b)^2 - 4ab \ge 0$,
hay $(a - b)^2 \ge 0$ là một điều tất nhiên, vì một trị số bình phương, khi nào cũng dương, tệ lắm là bằng không (0).

2) $m \ge g$, vì $(a + b) / 2 \ge \sqrt{ab}$,
hay $(a + b)^2 \ge 4ab$,
hay $(a + b)^2 - 4ab \ge 0$,
hay $(a - b)^2 \ge 0$ là một điều tất nhiên, vì một trị số bình phương, khi nào cũng dương, tệ lắm là bằng không (0).

Cuối cùng : $0 < a \leq h \leq g \leq m \leq b$.

(Nếu $a = b$, thì $a = h = g = m = b$).

III – So sánh 3 loại Trung Bình trên bằng Hình Học Phẳng.

Cách nầy tôi chưa thấy trong các sách Toán thông thường ở các Học Đường (không có nghĩa là không có sách Toán nào đã đề cập tới).

Xem hình ở dưới.

Vòng tròn tâm O, đường kính [BC], với $HB = a$, $HC = b$.
Tam giác vuông BAC tại A, có đường cao [AH].
Tam giác vuông OHA tại H, có đường cao [HD].

Ta có :

$AO = m = (a + b) / 2$.
$AH = g = \sqrt{ab}$.
$AD = h = 2ab / (a + b)$.

Thật thế :

1) $m = AO = (a + b) / 2$. (đường bán kính [AO]).

2) Theo hệ thức giữa các lượng của các phần tử trong một tam giác vuông, ứng với tam giác vuông BAC, vuông góc tại A, ta có :
$AH^2 = HB \times HC = ab$,
hay $AH = \sqrt{ab}$,
hay $g = AH = \sqrt{ab}$.

3) Theo hệ thức giữa các lượng của các phần tử trong một tam giác vuông, ứng với tam giác vuông OHA, vuông góc tại H, ta có:
$AH^2 = AD \times AO$,
hay $AD = AH^2 / AO = ab / [(a + b) / 2]$,
hay $AD = 2ab / (a + b)$,
hay $h = AD = 2ab / (a + b)$.

Theo bất đẳng thức tam giác, ứng với tam giác vuông OHA, ta có : $AH < AO$, hay $g < m$.
Theo bất đẳng thức tam giác, ứng với tam giác vuông HDA, ta có : $AD < AH$, hay $h < g$.

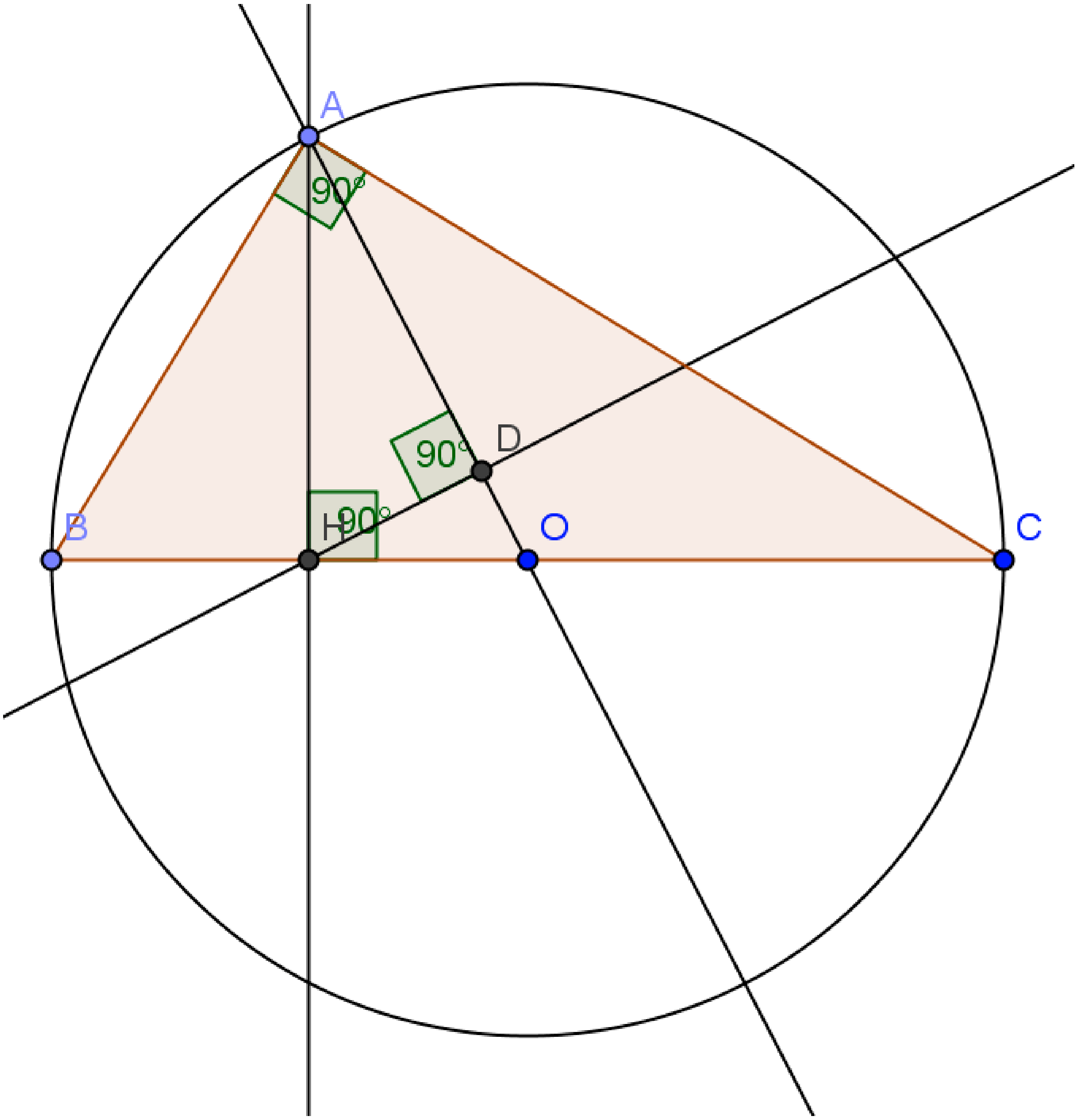
Cuối cùng, theo Hình Học Phẳng, ta cũng có, nếu $a \leq b$:

$0 < a \leq h \leq g \leq m \leq b$.

(Nếu $a = b$, ta có $a = h = g = m = b$).

Nguyễn Vĩnh-Tráng

104 032 012 nvt*ttl*
HB = a.
HC = b.
AO = m = (a + b) / 2.
AH = g = $\sqrt{ab}$.
AD = h = 2ab / (a + b).



Nguyễn Vĩnh-Tráng
104 032 012 nvt*ttl*